

Title	Analytic Scheme上の定理A,Bについて (複素解析幾何学研究会報告集)
Author(s)	斎藤, 恭司
Citation	数理解析研究所講究録 (1969), 78: 1-15
Issue Date	1969-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/107999
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Analytic scheme 上の定理 A, B について.

斎藤恭司

§1. はじめに

本稿では、[1] 等で与へられた、*analytic scheme* 上の *sheaf cohomology* の話し等をし、特に *countable analytic space* 上の *countable analytic sheaf* (定義等は後出.) について、Cartan の定理 A, B. の類似を示します。

これ等の話は多くの点で未完成であり、これからも変わると思われます。多くの批判意見を願います。

なお §2, §3, は *convex topology* についての一般論及び、*analytic scheme* の構成の復習等なので、既知の方はとばしてお読み下さい。なお、*analytic scheme* についての解説記事が、「数学の歩み」に載っています。

§2. *convex ring*, *convex module*

以下考える環はすべて、可換、結合的で、1 を持ち、*module* への作用は、1 が *identity* と作用するもののみを考え、*ring homomorphism* は 1 を 1 に写すもののみを考える。

- 環 A 上の *semi-norm* とは、 A から非負実数 \mathbb{R}^+ への写像 φ

$$\text{で } i) \quad \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in A$$

$$ii) \quad \varphi(a \cdot b) \leq \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \forall a, b \in A$$

$$iii) \quad \varphi(0) = 0$$

を満たすものの事です。

- A 上の *semi-norm* の族 T が、 $\varphi_1, \varphi_2 \in T \Rightarrow \exists \varphi_3 \in T$ s.t.
 $\sup(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varphi_3$ なる時、 A の *convex topology* と呼び、その組
 (A, T) を *convex ring* とする。

- 同様に、加群 M 上の *semi-norm* とは、 M から \mathbb{R}^+ への
 写像で、上記 i), iii) を満たすものとする。同様に、 M の *convex
 topology* T' 、及び、*convex 加群* (M, T') が定義される。

- もち論、*convex topology* が与えられた時、その *semi-norm*
 の族より自重的に、 A や M に位相が入り、それぞれ位相環、位
 相加群となっている。

- *convex 加群* (M, T') が (A, T) -module であるとは

$$i) \quad M \text{ は代数的に } A\text{-module}$$

$$ii) \quad \forall \varphi \in T' \text{ に対し } \exists \gamma \in T, \text{ s.t. } \varphi(am) \leq \gamma(a) \varphi(m) \quad \begin{matrix} \forall a \in A \\ \forall m \in M \end{matrix}$$

となる事である。

2番目の条件は、 φ に対し、

$$\tilde{\varphi}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{m \in M} \varphi(am) / \varphi(m)$$

とあって、 $\tilde{\varphi} \leq \psi$ という事もできる。

- 2つの convex 加群 (α は環) (M, T) , (N, T') 間の homomorphism

$$\lambda: (A, T) \rightarrow (N, T') \quad \text{とは}$$

i) $\lambda: M \rightarrow N$ は代数的な homomorphism

ii) $\forall \varphi \in T'$ に対し $\exists \psi \in T$ st. $\varphi \circ \lambda \leq \psi$ (連続条件)

2番目の条件は連続性の条件で、 $T' \setminus \text{Im}(\lambda) \leq T / \ker \lambda$ と書ける。更に $T' \setminus \text{Im}(\lambda) = T / \ker \lambda$ (ie $\forall \psi \in T, \exists \varphi \in T'$

$\psi / \ker \lambda \leq \varphi$) なる時、 λ を h -homomorphism と言う。 h -hom によって convex 加群は abelian category を作る。

又、自動的に topological 加群 (α は環) として連続になる。

- $(M, T_1), (N, T_2)$ は (A, T) -module とする。

$$(M, T_1) \otimes_{(A, T)} (N, T_2) \quad \text{とは} \quad (M \otimes_A N, T_1 \otimes_A T_2) \quad \text{の事である。}$$

$$\text{ここで } T_1 \otimes T_2 = \{ \varphi_1 \otimes \varphi_2 : \varphi_i \in T_i \}$$

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 (x) = \inf \sum_{x = \sum_i m_i \otimes n_i} \varphi_1(m_i) \cdot \varphi_2(n_i)$$

- Prop. $(M, T_1) \hat{\otimes} (N, T_2) \cong (\hat{M}, T_1) \hat{\otimes} (N, T_2) \cong (\hat{M}, T_1) \hat{\otimes} (\hat{N}, T_2)$.

ただし、 $\hat{}$ は completion を意味する。上の事は、complete tensor をする前に、各項を completion しても結果は変わらない事を示している。

- A や M , に対して、その convex topology は一意に定まっているわけではないが、前後の事状により、位相がはっきりして

いる時は $(A, T), (M, T)$ を A, M 等と略記する。

- convex 加群の列

$$M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M_2 \xrightarrow{\lambda_2} \dots \rightarrow M_n$$

が exact とは

i) 代数的に exact, ii) 各 λ_i は h -hom. の事

quasi-exact とは

i) $\text{Im } \lambda_i \subset \ker \lambda_{i+1}$ dense ii) 各 λ_i は h -hom. の事とする。

- 例 1. convex 加群 M にその completion \hat{M} を対応させる functor は quasi-exact functor である。

例 2. functor $M \mapsto M \hat{\otimes} P$ は右-quasi-exact.

- 上例の様に、不都合な事情は、以下の countable condition によって避けられます。

定義. convex topology T が countable とは、或る T の可算部分集合 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ で、 $\forall \varphi \in T, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t.

$\varphi \leq \varphi_n$ なるものが存在する事である。

この時、convex ring (又は加群) は位相空間として metrizable.

(M, T) が countable かつ complete の時 Fréchet と呼ぶ。

- Prop. $\lambda: M \rightarrow N$ は Fréchet 空間の homomorphism とする。

λ が h -hom ならば、 $\text{Im}(\lambda) = \lambda(M)$ は N の中で closed.

Cor. Countable module の category で考える時、functor

$M \mapsto \hat{M}$, $M \mapsto M \hat{\otimes} P$ は、それぞれ、exact

右-exact となる。

さて、 (A, T) が次の条件を満たしている時、はかろふ³という。

$$* \quad \exists a \in A. \text{ s.t. } a \text{ is invertible} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi, \varphi' \in T \quad \{\varphi(a^n) \varphi'(a^{-n}) : n \in \mathbb{N}\} \text{ is bounded} \\ \exists \gamma \in T. \quad \gamma(a) < 1 \end{array} \right.$$

例へば、 A が nontrivial な付値体を係数に持つていれば、はかろふ³である。さてこの事状の下に先の Prop. の逆が言える。

Prop. $\lambda: M \rightarrow N$ は はかろふ³ (A, T) -Fréchet-module 間の homomorphism とする。 $\lambda(M)$ が N の中で closed ならば、 λ は h -hom である。

Cor. 上の時、 λ が onto ならば、 λ は open map である。

§3. analytic spaces.

(A, T) を convex ring とする時、 p が (A, T) 上の prime semi-norm とは、次の2条件が満たされる事とする。

- i) p は A 上 multiplicative な semi-norm (i.e. $p(a \cdot b) = p(a) \cdot p(b)$)
- ii) $\exists \varphi \in T \quad \text{s.t.} \quad p \leq \varphi$

$\text{Spec}(A, T) = \{ p : (A, T) \text{ 上の prime semi norm} \}$ と置く。

これは、 (A, T) のスペクトルとして、重要な性質を多く持っているが、ここではすべて省略する。

有限個の $f_1, \dots, f_k \in A$ に対して、

$$D(f_1, \dots, f_k) = \{ p \in \text{Spec}(A, T) ; p(f_i) < 1 \text{ for } i=1, \dots, k \}$$

と置いて、これを基本近傍系として $\text{Spec}(A, T)$ に位相を入れる。

一方 semi-norm φ に対し、

$$\text{supp}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{p : \text{prime semi-norm } p \leq \varphi\} \text{ と置く。}$$

さて、 $D = D(f_1, \dots, f_k) \subset \text{Spec}(A, T)$ に対し、

$$T_D = \{\varphi \in T : \text{supp}(\varphi) \subset D\} \quad \text{とおく}$$

$$(A_D, T_D) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{A}, \widehat{T_D}) \text{ とする。}$$

こうして presheaf $\tilde{A} : D \mapsto A_D$ が定まった。

一方 (M, T') を (A, T) -module とする時、

$T'_D = \{\varphi \in T' : \text{supp}(\tilde{\varphi}) \subset D\}$ (ここで $\tilde{\varphi}$ とは §2 で定義されたもの) として、 $(M_D, T'_D) = (\widehat{M}, \widehat{T'_D})$ と置くと、

再び、 $\text{Spec}(A, T)$ 上の pre-sheaf $\tilde{M} : D \mapsto M_D$ が定まる。明かに、 \tilde{M} は \tilde{A} -module である。

$\lambda : (A, T) \rightarrow (B, T')$ が与えられると、対応して、

$$\alpha_\lambda : \text{Spec}(B, T') \ni p \mapsto p \circ \lambda \in \text{Spec}(A, T)$$

が定まり、連続である。

一方 $D \subset \text{Spec}(A, T)$ に対し、 $(A, T) \rightarrow (B, T') \rightarrow (B_{\alpha_\lambda^{-1}D}, T_{\alpha_\lambda^{-1}D})$ は、 $(A, T) \rightarrow (A_D, T_D) \rightarrow (B_{\lambda^{-1}D}, T_{\lambda^{-1}D})$ と分解し(証明には spectral radius theorem を要する。[1] 参照) 従って

$$\tilde{\lambda} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \quad \text{を得る。} \quad \text{従って } \lambda \text{ に対し、}$$

$$(\alpha_\lambda, \tilde{\lambda}) : (\text{Spec}(B, T'), \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec}(A, T), \tilde{A})$$

が定まった。

一般に \tilde{A} が sheaf になるが、あるいは $\text{Spec}(A_D, T_D)$ と D とが homeo かわらない。そこで、この様な付帯条件を満たした時、 (A, T) を representable algebra と言ひ、対応して定まった空間 $(\text{Spec}(A, T), \tilde{A})$ を affine analytic space と呼ぶ。もし (A, T) が countable ならば、 $(\text{Spec}(A, T), \tilde{A})$ を countable と言ひ。

affine analytic space は重要な特徴づけを持っている。少し準備をする。

定義 i) convex ring R が L -ring であるとは、

$$\exists! p_R \in \text{Spec}(R) \quad \text{s.t.} \quad \forall q \in \text{Spec}(R), \quad p \geq q$$

ii) $\mu: R_1 \rightarrow R_2$ L -ring 間の homomorphism λ が L -morphism とは、 $\mu: \text{Spec}(R_2) \rightarrow \text{Spec}(R_1)$ が $p_{R_2} \in p_{R_1}$ に写す事。

iii) (X, \mathcal{O}_X) が L -ringed space とは、convex ring に value を持つ sheaf \mathcal{O}_X 付の空間 X である。

i) 各 stalk $\mathcal{O}_{X,x}$ は L -ring になる。

ii) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \ni f$ に対し、 $X_f = \{x \in X: p_x(f) < 1\}$ は open.

iii) $\forall p \in \text{Spec}(\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X))$ について $p(f) < 1$ となるものとする。

又、 L -ringed space 間の morphism が L -morphism とは、各 stalk に於て、 L -morphism になる事とする。

Prop. 1) affine analytic space は L -ringed space である。

2) affine analytic space 間の morphism

$$\Phi: (\operatorname{Spec}(BT), \tilde{B}) \longrightarrow (\operatorname{Spec}(AT), \tilde{A})$$

が L -morphism になる必要充分条件は $\exists \lambda \in \operatorname{Hom}((AT), (BT))$ によって $\Phi = (\lambda, \tilde{\lambda})$ と書ける事である。

定義. convex ring に値を持つ sheaf 付空間 (X, \mathcal{O}_X) が analytic space であるとは. local に affine analytic space に同型となる事である。(i.e. 或る open covering $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ があって. 各 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ は affine analytic space に同型.) 上の Prop. 1) により. analytic space は L -ringed space である事がすぐ分る。もし $\#\{U_i\}$ を高々可算個にとれ. 各 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が countable の時.

(X, \mathcal{O}_X) を countable (analytic space) と言う。countable な位相空間として X は σ -compact である。

Prop. (S, \mathcal{O}_S) を affine analytic space, (X, \mathcal{O}_X) を任意の L -ringed space とする時.

$$\Gamma: \operatorname{Hom}(X, S) \cong \operatorname{Hom}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S), \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

ここで. 左辺は L -morphism 全体, 右辺は. global section 間の cont. hom. 全体. $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ を representable と名付ける由来は. この等式から来しています。

さて. analytic space (X, \mathcal{O}_X) 上 convex module に

値を持つ sheaf \mathcal{F} で次の様なものを考えます。

X の或る affine covering $\{U_i\}$ に対し、 $A_i = \mathcal{P}(U_i, \mathcal{O}_X)$ -module M_i が存在して、 $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ と書ける。

更に M_i が A_i -finite-module に取れる時、 \mathcal{F} の事を、locally finite と呼びます。又、 M_i が countable に選べる時、 \mathcal{F} を countable とする。

sheaf \mathcal{F} に更に次の付帯条件を付けます。これ等は、或る特別の場合には、自動的に成立して居、将来は、直接証明される、あるいは、もっと自然な条件に帰着されると思ひます。
(top, flat?)

1) $X = \bigcup U_i$ を affine covering とする時、定まる chain complex の morphism

$$d: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

は h -morphism である。

2) X の affine open set U 及び U の analytic polyhedron D に対し、 $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D, \mathcal{F})$ の image は dense.

§4. cohomology.

(X, \mathcal{O}_X) を countable analytic space, \mathcal{F} をその countable sheaf とする。

X は countable だから、任意の open covering に対し、その細分となる countable affine covering をとれる。そこで今 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を X の countable affine covering とする。

この時、次の4つを示す。

$$\textcircled{1} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

が、countable sheaf の short exact sequence とする。

この時、long. exact sequence が定まる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) &\longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \\ &\longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}) \\ &\longrightarrow \dots \end{aligned}$$

② X が affine の時.

$$H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \quad i > 0$$

③ X が affine の時 D が hol. convex dom.

$$\text{とする時} \quad \Gamma(D, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes \Gamma(D, \mathcal{O}_X)$$

④ 更に \mathcal{O}_X が次に述べる意味で locally closed かつ \mathcal{F} が locally finite なるは。

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{Xp} \longrightarrow \mathcal{F}_p \longrightarrow 0.$$

定義. \mathcal{O}_X は 点 p で closed とは. p の任意に小さい近傍 D に対し.

$$[\mathcal{O}_X(D)]^k \longrightarrow [\mathcal{O}_{Xp}]^k$$

なる写像を考える。 \mathcal{O}_{Xp}^k の任意の \mathcal{O}_{Xp} -submodule の inverse image が closed となる事である。

証明の概略.

まず、①は②の簡単な系である。

向者、与へられた sheaf の short exact seq. に対し
作られた chain complex 間の写像

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

が exact である事は一般に知っているが、最後の morphism
が surjective が一般には分らない。

しかるに open set $U_{i_0 \dots i_k} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ は affine
だから $\Gamma(U_{i_0 \dots i_k}, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U_{i_0 \dots i_k}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$ は
surjective. 従って

$$\prod_{i_0 \dots i_k} \Gamma(U_{i_0 \dots i_k}, \mathcal{G}) \rightarrow \prod_{i_0 \dots i_k} \Gamma(U_{i_0 \dots i_k}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

従って、この symmetric な部分について、

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

次に、②、③の証明は次の2段階に分ける。

Lemma 1 もし、 $\mathcal{F} = \tilde{M}$ なる M が存在するを、

$$1) \quad H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad i > 0$$

$$2) \quad \mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X(D)$$

Lemma 2. X を affine analytic space. とする時、

$\mathcal{O}(X)$ -module M が存在して、 $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

Lemma 1 の証明の大略.

- 1) Sheaf \tilde{M} に対して $M' : D \mapsto (M, T_D)$ なる "constant sheaf" を考える。 M' を completion したものは \tilde{M} となる。

chain complex

$$0 \rightarrow M \rightarrow C^1(\mathcal{U}, M') \rightarrow C^2(\mathcal{U}, M') \rightarrow \dots$$

は exact である。 (\because const. sheaf elli)

この列を completion すると

$$0 \rightarrow M \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \tilde{M}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \tilde{M}) \rightarrow \dots$$

を得る。 §2 の Prop. により、この列も exact になる。

- 2) $M_D = M \hat{\otimes} A_D$ を言えばよい。

$M = (M, T')$, $A = (A, T)$ と置く。

$$\begin{aligned} M \hat{\otimes} A_D &= (M, T') \hat{\otimes} (A_D, T_D) \\ &= (M, T') \hat{\otimes} (A, T_D) \\ &= (M, T' \otimes T_D)^\wedge \end{aligned}$$

従って $T_D = T' \otimes T_D$ を言う。

$$T_D \ni \varphi \text{ について } \varphi = \tilde{\varphi} \otimes \varphi$$

$$T' \otimes T_D \ni \varphi_1 \otimes \varphi_2 \text{ について } \widetilde{\varphi_1 \otimes \varphi_2} \leq \varphi_2$$

Lemma 2. の証明の大略

$$T'(X \mathcal{F}_i) = M \text{ とおく。}$$

\mathcal{F} は countable analytic sheaf. だから $X = \bigcup_{\mu} D_{\mu}$ によって. $\mathcal{F}|_{D_{\mu}} = \tilde{M}_{\mu}$ とする。

証明すべき事は. $M_{D_{\mu}} = M_{\mu}$ となる事である。
canonical に $M_{D_{\mu}} \rightarrow M_{\mu}$ なる homomorphism があって
image が dense だから. この写像が h-morphism かつ
injective である事を言う。

その為 D_{μ_0} を fix し. M 上の seminorm φ で.
 $\text{supp}(\tilde{\varphi}) \subset D_{\mu_0}$ なるものに対し. M_{μ_0} 上の semi-norm
 ψ で. $\varphi \leq \psi$ を言えはよい。

$0 \rightarrow M \rightarrow \prod M_{\mu_i}$ が exact であり.

$\varphi \leq \sup_{i=1, \dots, n} \varphi_{\mu_i}$ なる M_{μ_i} 上の semi-norm
 φ_{μ_i} が存在する。

As a plat な事より.

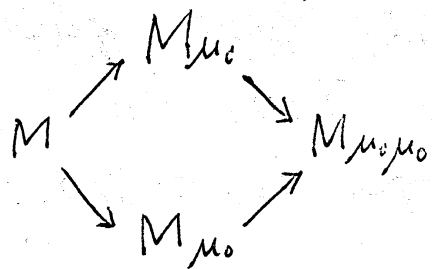
$\varphi = \tilde{\varphi} \otimes \varphi \leq \sup_{i=1, \dots, n} \tilde{\varphi} \otimes \varphi_{\mu_i}$. 従って改めて $\tilde{\varphi} \otimes \varphi_{\mu_i}$
を φ_i と置けば

i) $\varphi \leq \sup_{i=1, \dots, n} \varphi_i$ ii) $D_{\mu_0} \supset \text{supp } \varphi \supset \text{supp } \varphi_i$

φ_i は M_{μ_i} の上の semi-norm だから.

$$\text{supp } \varphi_i \subset D_{\mu_0} \cap D_{\mu_i} = D_{\mu_0 \mu_i}$$

従って.



において.

φ_i は M_{μ_i, μ_0} 上の semi-norm φ_i' の M_{μ_i} への inverse image と呼ぶ。 φ_i' の M_{μ_0} への inverse image を φ_i'' とする。 $\varphi = \sup_{i=1, \dots, n} \varphi_i''$ は M_{μ_0} 上の semi-norm であるものとする。

q.e.d.

最後に ④ を示す。これは例へば "topological manifold" 等、一般には成立し得ると思われる。

$\mathcal{F} = \tilde{M}$ とする。 D を p の近傍とする。 M の image で \tilde{M}_p の中で生成される \mathcal{O}_p -submodule \mathcal{M} の M_D への inverse image を \mathcal{N} とする。 \mathcal{N} は M の像をすべて含むから M_D の中で dense。もし \mathcal{N} の closedness が言えれば、 $\mathcal{N} = M_D$ となり、 \mathcal{M} は M_D の像を含む。 D は任意だから $\mathcal{M} = \tilde{M}_p$ となる。

従って次の事が言えればよい。

* \mathcal{O}_X が locally closed, \mathcal{F} が locally finite の時、 $X \ni p$ の任意の小さい近傍 D に對し、

$$\mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{F}_p$$

による、 \mathcal{F}_p の $\mathcal{O}_{X,p}$ -submodule の inverse image は closed.

∵ D が充分小さければ、 locally finite より、

$$\mathcal{O}_X(D)^R \longrightarrow \mathcal{F}(D) \longrightarrow 0$$

従って この写像は open map である。

次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D)^k & \longrightarrow & \mathcal{F}(D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{X_p}^k & \longrightarrow & \mathcal{F}_p \end{array}$$

g.e.d.

注. $\mathcal{O}(X)$ は Stein algebra ならば, locally closed τ がある。
locally closed の時.

$$\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X_p}$$

に \mathcal{F} , τ 各 stalk の prime ideal は, global \mathcal{F} closed prime
ideal に $\mathcal{F} + \mathcal{F}_p$ である。

[1] K. Saito : Schematic theory of analytic space

Proceedings of international conference on Functional
analysis and related topics.

[2] K. Saito : Convex rings and analytic spaces
is appear in Sūgaku.